SOBRE EL SIGNIFICADO SUBJETIVO DE LA PROBABILIDAD

Bruno de Finetti

(Traducido al castellano por Roberto Torretti)

Advertencia del traductor

Bruno de Finetti (1906-1985) y Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) descubrieron independientemente, poco antes de 1930, el hecho fundamental que sirve de base al llamado bayesianismo[†]: un agente racional –esto es, un agente que, apostando de acuerdo con sus estimaciones subjetivas no se exponga a perder pase lo que pase– tiene que ajustar sus estimaciones subjetivas a las reglas del cálculo de probabilidades. Ramsey explica su descubrimiento en el ensayo "Truth and probability", redactado en 1926 y publicado póstumamente en su libro *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (London: Routledge & Kegan Paul, 1931). De Finetti comunica sus ideas ya al Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Bolonia en 1928 (como consta en las actas de este congreso, publicadas en 1932), en una ponencia que incluye el célebre teorema de representación que da lugar a la tesis de los bayesianos, según la cual las estimaciones subjetivas de los agentes racionales necesariamente convergen si se basan en la misma experiencia. La demostración de este teorema es también el contenido principal del artículo "Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio", aparecido en 1930 en *Memorie della Reale Accademia dei Lincei* (IV, 5: 86-133). El presente ensayo –publicado en 1931 bajo el título "Sul significato soggetivo della probabilità" en la revista polaca *Fundamenta Mathematicae* (17: 298-329)– expone desde una perspectiva filosófica las ideas del autor en forma más breve y accesible que su trabajo "La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives", publicado en 1937 en

[†] La escuela bayesiana de estadística y filosofía de la inducción y las probabilidades toma su nombre del matemático y filósofo inglés, Rev. Thomas Bayes (1702–1761), debido a la importancia decisiva que esta escuela asigna a un teorema elemental del cálculo de probabilidades que ya utilizó Abraham de Moivre (1667–1754), pero que se conoce como Teorema de Bayes por la figuración que tiene en el principal escrito de este autor, *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, publicado en *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **53** (1763), 370–418).

Annales de l'Institut Henri Poincaré (7: 1-68) y muy difundido en traducción inglesa (en Henry E. Kyburg Jr. y Howard E. Smokler, eds., *Studies in Subjective Probability*, New York, Wiley, 1964, pp. 53-118). He numerado consecutivamente las notas del autor y las mías, que se distinguen porque van entre corchetes y terminan con la abreviatura "N. del T.". Doy más indicaciones sobre el pensamiento de Ramsey y de Finetti acerca de esta materia en mi ensayo "El concepto de probabilidad" que aparecerá próximamente en la *Festschrift* dedicada a Carla Cordua por la revista *Diálogos* (nº 81, enero de 2003).

1. El objeto del presente trabajo es aclarar y profundizar el significado y el valor psicológico que poseen –prescindiendo de cualquier eventual interpretación objetiva posible– el concepto de probabilidad y los fundamentos de la teoría de la probabilidad, y probar que esta se puede deducir y reconstruir con todo rigor basándose exclusivamente sobre tal interpretación y planteamiento psicológico. Investigaremos en qué sentido las asignaciones de probabilidad pueden ser *incoherentes*, o sea, intrínsecamente contradictorias, y analizaremos el significado, el valor y el alcance de la noción de coherencia. Deduciremos de ella las reglas de la lógica probabilística, las cuales nos enseñan a razonar en el campo de las asignaciones de probabilidad manteniendo intacta la coherencia del pensamiento consigo mismo; tal como lo hacen en el campo de las proposiciones las reglas de la lógica formal.

Esta investigación asume una importancia indudable e incomparablemente mayor para quien comparte la concepción subjetiva de la probabilidad; la concepción para la cual toda asignación de probabilidad solo tiene y solo puede tener un valor esencial y exclusivamente psicológico. Demostrar, como haremos, que la teoría de la probabilidad se puede construir con todo rigor permaneciendo en el ámbito más puro de dicho punto de vista significa entonces probar en efecto la validez de toda una teoría basada hasta hoy en supuestos inaceptables y carentes de sentido.

Pero también para quien quisiese atribuir a la probabilidad, en cualquier problema y en cualquier sentido, un valor objetivo, la cuestión de la que voy a ocuparme tiene un significado preciso y una importancia innegable: nuestro modo de plantear y exponer el cálculo de probabilidades permite en efecto separar aquello que en todo problema hay de lógico y aquello que es de índole y valor puramente empíricos. En cualquier teoría matemática hace falta justamente fijar este distingo para poder profundizar útilmente la crítica de sus principios, y sin embargo hasta ahora faltaba en el cálculo de probabilidades que, por eso, todavía está tan lejos del rigor formal ya alcanzado quizás en todos los otros campos de las matemáticas. Aclarado este punto, se podrá decir de cada problema si está determinado lógicamente o si está indeterminado, quitando así del medio tantas dudas e incertidumbres que subsisten aún[1]. En

[1] Cf. mi nota "Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità", *Rend. R. Acc. Naz. Lincei*, 1930, 2ª sem.

suma, nuestro propósito es caracterizar el conjunto de las opiniones formalmente admisibles, sin preocuparnos de si existen razones de cualquier otro orden que puedan hacernos considerar como más o menos justa cualquiera de ellas. Tales razones se alejan en efecto del aspecto puramente lógico del problema, que es el único que puede y debe interesar a la matemática, y por consiguiente, parece oportuna y necesaria una división clara de las dos fases: caracterización de las opiniones no incoherentes, fase formal, a tratar matemáticamente; elección de una entre tales opiniones posibles, que se debe dejar a la práctica, al buen sentido, al criterio de cada individuo. La única diferencia entre quien sigue el punto de vista subjetivo y quien sigue el objetivo, es que, mientras para el primero la elección es libre y arbitraria, para el segundo ella puede ser justa de un solo modo. Para este, nuestro planteamiento consistiría en el artificio de considerar, junto a la única asignación de probabilidad objetivamente justa, también aquellas que, aun siendo erróneas, no son contradictorias por sí mismas. Por las razones brevemente aludidas arriba, es claro que el distingo propuesto justifica plenamente el interés de la presente investigación, también si no se quiere considerarla más que en su aspecto formal de planteamiento útilmente sagaz.

2. Pero también su interés conceptual debe ser reconocido y aceptado, al menos en parte, incluso por quien no comparte el punto de vista subjetivo. En efecto, su confianza en la existencia de un valor objetivo de la probabilidad no podrá subsistir más que en cierto campo más o menos restringido; serán solamente los eventos[2] de un cierto tipo más o menos esquemático y artificioso a los que atribuirá una probabilidad objetiva, mientras que en la vida práctica él mismo será continuamente llevado a pensar y decir que un cierto evento es fácil, es probable, es verosímil, y basará razonamientos y decisiones en tales juicios también en áreas de las que, conforme a su concepción, la teoría de la probabilidad estaría necesariamente excluida. Para justificar tales juicios y razonamientos es entonces necesario un tratamiento conforme al punto de vista subjetivo, cuyo campo de validez no está sujeto a limitación alguna.

Las previsiones y suposiciones que continuamente andamos haciendo constituyen, salvo por los rarísimos juicios lógicamente ciertos, el objeto habitual de nuestro pensamiento en todas las circunstancias prácticas de nuestra vida. En la credibilidad de tales previsiones y suposiciones estamos dispuestos a tener, según los casos, un cierto grado mayor o menor de confianza. Y al combinar esos juicios sobre el grado de credibilidad de nuestras diversas previsiones y suposiciones ocurre de hecho que razonamos, aunque sea inconsciente y groseramente, conforme al cálculo de probabilidades[3].

2 [“**evento** (*lit*) **I** *m* **1.** suceso o acontecimiento”. Seco, Andrés y Ramos, *Diccionario del español actual* (Madrid: Aguilar, 1999). N. del T.]

3 [Investigaciones psicológicas del último tercio del siglo XX parecen indicar que la mayoría de la gente *de hecho no razona*, ni siquiera groseramente, conforme al cálculo de probabilidades. Cf. Kahneman y Tversky, “On the pychology of prediction”, *Psychological Review*, **80**: 237–51 (1973);

Uno de los ejemplos más sugestivos es el de las indagaciones policiales o judiciales, donde se procede siempre por indicios e inducciones, donde no se trabaja jamás sobre lo cierto, sino siempre y solamente sobre lo probable. Supongamos, por ejemplo, que un desconocido ha perpetrado un delito; algunos rastros permiten considerar a tres individuos como altamente sospechosos. El comisario que atribuye un cierto grado de credibilidad a cada una de estas tres hipótesis, ¿qué confianza puede tener en que las indagaciones están bien encaminadas, esto es, que una de la tres hipótesis es la verdadera? Aplica sin duda el teorema de las probabilidades totales[4] esencial, si no numéricamente. Y del mismo modo aplicará el teorema de las probabilidad compuestas si quiere evaluar con qué probabilidad, o sea, con qué grado de confianza puede esperar identificar al culpable entre los tres sospechosos y ponerlo bajo arresto. Y aplicando siempre inconscientemente estos teoremas razonamos en todas las circunstancias de la vida en que nos atenemos a las probabilidades; si juzgamos acerca de la probabilidad de que llueva para decidir si llevamos el paraguas o lo dejamos en casa, o de la probabilidad de llegar a tiempo caminando a la oficina para decidir si tomamos o no el tranvía o el taxi, o de la probabilidad de que los varios espectáculos anunciados para esta tarde sean más o menos interesantes para decidir si salimos o no, y a dónde.

¿Se justifica este modo de pensar? Y, en caso que sí, ¿está impuesto por exigencias lógicas, o solo está sugerido por motivos psicológicos?

En los ejemplos considerados nadie por cierto pensará que se trata de una probabilidad objetiva, o que el caso caiga con todo bajo el cálculo ordinario de probabilidades. Y no podrá, por lo tanto, responder a nuestras preguntas.

En cambio, en el modo que seguiremos, el problema tendrá un desarrollo perfectamente armonioso, una respuesta precisa y exhaustiva, porque aquí se opera directamente sobre el grado psicológico de confianza de un individuo respecto a una cierta suposición. Es justamente ese grado completamente subjetivo de confianza lo que en el lenguaje corriente se designa con el nombre de probabilidad, y mi opinión es precisamente esta: que el concepto expresado por el lenguaje ordinario tiene, por esta vez, un valor absolutamente superior al de los matemáticos que desde hace siglos se afanan inútilmente en ver aquí un significado que no existe.

Tversky y Kahneman, "Extensional versus intuitive reasoning", *Psychological Review*, **90**: 293–315 (1993); Tversky, Slovic y Kahneman, eds., *Judgment under Uncertainty*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982. Algunos críticos han sugerido que tales resultados podrían deberse a que los sujetos investigados no entendieron bien el significado de los términos utilizados por los encuestadores. N. del T.]

4 [Conforme al *teorema de las probabilidades totales*, si $E_1,\ldots, E_n$ son eventos mutuamente incompatibles, la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno. Simbólicamente: $\mathbf{p}(E_1 \vee \ldots \vee E_n) = \mathbf{p}(E_1) + \ldots + \mathbf{p}(E_n)$. N. del T.]

¿El lector no está de acuerdo? No importa. ¿Considera que en cierto tipo de problemas este significado existe? Le concedo que exista en todos los casos que quiera (y serán, según sus gustos, el caso de los juegos de azar, o de la estadística, o de la física molecular, o no importa cuáles más). En otros casos, como en los ejemplos referidos, se trata evidentemente de una pura sensación psicológica. Ahora bien, en seguida demostraremos cómo y por qué también en estos casos valen los teoremas del cálculo de probabilidades, justificando así uno de nuestros modos empíricos más importantes de raciocinio.

Es en este punto de vista provisorio y desapasionado, diría casi agnóstico, que tomo tierra, y sobre este terreno cualquiera podrá seguirme, con tal de que tenga la paciencia, sin sacrificar ninguna de sus convicciones.

No se me podrá objetar que construyo la teoría de la probabilidad sobre supuestos falsos; a lo sumo, quien quiera creer en la probabilidad objetiva, puede decir que dejo a un lado supuestos verdaderos. Y esta no es una acusación. Quien esté convencido de la índole euclidiana del espacio físico ¿debería acaso desconfiar de una demostración porque esta no depende del postulado de las paralelas y por ende también resulta verdadera en una geometría no euclidiana?

¿Acaso quien crea en la existencia de un sistema en "reposo absoluto" debería repudiar un teorema de cinemática válido *también* para los movimientos relativos?

La probabilidad, en cuanto sensación psicológica de un individuo, está sujeta a ciertas leyes. Si un evento tiene una probabilidad objetiva, de todos los individuos que ajusten a ella su posición psicológica se podrá decir que juzgan correctamente, y de los otros, que están equivocados; aparte de esto, las leyes son las mismas para todos, y valen por lo tanto en particular para las probabilidades objetivas.

Sobre la existencia de estas dejo la plena facultad de pensar, caso por caso, cada uno a su modo; lo que es yo –insisto en repetirlo aquí por última vez– tengo al respecto una opinión muy simple y radical: la probabilidad objetiva no existe jamás.

Las razones con que sostengo y pruebo esta convicción están expuestos exhaustivamente en mi ensayo sobre "Probabilismo"[5], las objeciones y las dificultades que se le pueden oponer son allí rebatidas. Todas, excepto una, y una de las mayores, que será desmontada en el presente trabajo. Una de las mayores dificultades para aceptar una concepción extremadamente subjetivista como esta consiste por cierto en la impresión que si todo es subjetivo todo debe ser arbitrario y ninguna ley puede valer. A tal objeción no hay respuesta más convincente que la de los hechos a que pronto llegaremos, la cual consiste en probar que todo el cálculo de probabilidades puede construirse, siguiendo este punto de vista, con todo rigor.

5 En *Logos*, 1931. [Vol. 14, pp. 163–219; hoy es más accesible la traducción inglesa: "Probabilism: A Critical Essay on the Theory of Probability and on the Value of Science", *Erkenntnis*, **31**: 169 (1989). N. del T.]

3. Se trata entonces de *medir* la probabilidad subjetiva, o sea, de traducir en la determinación de un número nuestro grado de incertidumbre relativo a un juicio dado; este es el primer problema que se presenta cuando queremos fundar el cálculo de probabilidades según la concepción subjetivista.

Me parece que, entre los diversos métodos que se podrían seguir, debe preferirse aquel que de hecho he adoptado y que se basa esencialmente en una observación que se remonta a Bertrand[6]. Si un individuo juzga igualmente probables dos eventos. esto es, si se siente ante ellos en el mismo estado de ánimo, con el mismo grado de duda, de incertidumbre, de convencimiento, podría intercambiar indiferentemente los temores y las esperanzas, las ventajas o los inconvenientes que derivan de la realización de uno de ellos con las consecuencias, que se han supuesto idénticas, del otro. Ahora estos efectos o, mejor dicho, estos aspectos de un juicio de probabilidad son evidentemente bastante más accesibles a un procedimiento de medida y responden por eso perfectamente a nuestro propósito.

También en el lenguaje ordinario, con un modo de hablar bastante usual, se expresa el grado de confianza que tenemos en la verificación de un evento dado mediante las condiciones en que podríamos apostar a que ocurrirá: tan intuitivo nos parece que por una misma ganancia se puedan aceptar condiciones más o menos gravosas según que el triunfo se espere como más o menos probable. El mismo criterio, debidamente precisado y profundizado, nos conducirá a las definiciones en que fundaremos la teoría de la probabilidad.

Seguiremos en primer lugar un método directo que conduce por la vía más inmediata a la meta, pero que puede dejar alguna impresión de duda, porque su simplicidad puede parecer artificiosa. Y veremos en segundo lugar que en el mecanismo esencial del razonamiento solo intervienen, esencialmente, consideraciones cualitativas muy simples y espontáneas. Precisar el planteamiento como lo haremos primero no constituye pues una restricción efectiva; solo sirve para conducir rápidamente a resultados de interés práctico, evitando cuestiones de índole crítica. En suma: se utiliza un planteamiento cuantitativo para alcanzar inmediatamente resultados cuantitativos; por otra parte, es posible partir de una planteamiento cualitativo, que conduce a resultados cualitativos, y mostrar después que estos son susceptibles de expresarse en forma cuantitativa.

El primer planteamiento a que aludía se basa en suma en la noción de esperanza matemática. Es sabido que sobre este concepto se ha discutido mucho y se han suscitado muchas dudas y suspicacias. Pero parece estar establecido ya que –como en todos los casos de este género– se trataba de una cuestión sin sentido, que una cosa es juzgar si una apuesta es *equitativa* y otra juzgar la conveniencia que un cierto individuo, en un momento dado, en determinadas circunstancias, pueda hallar en aceptarla. Conveniencia que, además, será evaluada de muy diversas maneras según el carácter

6 Bertrand, *Calcul des probabilités*, p. 27. [Paris: Gauthier-Villars, 1888. N. del T.]

de cada uno y su afición al riesgo. Hay una diferencia esencial entre el caso de una apuesta esporádica y bien delimitada y la situación de un sujeto que esté dispuesto a apostar sistemática e ilimitadamente.

4. El sentido preciso de este distingo se mostrará claramente enseguida.

Para medir numéricamente el grado de confianza que un sujeto dado O siente tener en la efectuación de un evento E debemos suponer –para ponernos en el punto de vista más simple en que se utiliza la esperanza matemática– que él podría estar obligado a *mantener un banco* de apuestas en pro o en contra de un cierto número de eventos, entre ellos el evento E. Pensemos, para dar un ejemplo, que se trata de un certamen en el que participan n competidores, y que los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sobre los cuales O está comprometido a aceptar apuestas consisten en la victoria del competidor número 1, 2,..., n, respectivamente. Las reglas de la apuesta se fijan de la manera siguiente: el sujeto O que mantiene el banco tiene la facultad de fijar el precio p de un bono o título que da derecho a cobrar una lira en caso que ocurra un cierto evento E; hecho esto, O se compromete a vender o comprar a ese precio tantos de esos bonos como el público desee. Cualquier apostador que se presente al banco de O y quiera apostar al evento E tiene entonces la facultad de comprar al precio pS un título que le da derecho, si gana la apuesta (esto es, si E ocurre), a exigir la suma S. (O a la inversa, si quiere apostar contra el suceso E, puede cobrar la suma pS si se obliga a pagar la suma S en caso de perder la apuesta, esto es, si ocurre E. Esta alternativa cae bajo la anterior si se consideran valores negativos de S.).

El número p es evidentemente tanto más grande cuanto mayor sea la confianza de O en la realización de E; por la misma ganancia de una lira se podrá aceptar una condición tanto más gravosa, esto es, un precio p tanto más elevado, cuanto mayor sea la esperanza de triunfo, es decir, cuanto más probable parezca el evento E. Llamaremos entonces, *por definición*, al número p: *"probabilidad del evento E según el sujeto* O*"*. Cuando se entienda con ello referirse siempre a un mismo sujeto, o cuando todos los individuos que se quiera considerar tengan la misma opinión, podrá sobreentenderse la indicación del sujeto y se podrá hablar simplemente de la "probabilidad del evento E".

Según un modo más común de apostar se dice que un cierto evento se ofrece en apuesta "a h contra k" (vgr. a 3 contra 2, o a 1 contra 4, etc.). La apuesta se regula entonces de modo que si ocurre E uno de los dos competidores gana k liras, mientras que si no ocurre, el otro gana h. La diferencia está solo en la forma: lo mismo da decir que el primero paga h liras y gana $(h + k)$ si E ocurre; resulta que debemos tener $h = p(h + k)$, de modo que $p = h : (h + k)$. Quien ofrece, por ejemplo, un evento a 3 contra 2, a 1 contra 4,... le atribuye la probabilidad $p = 3/5 = 0{,}60$, $p = 1/5 = 0{,}20$, etc.

5. En este punto todavía se justifica una impresión de desconfianza que las consideraciones siguientes, al poner bajo su verdadera luz el valor y el sentido de nuestra definición, servirán para disipar. Puede parecer en efecto que en el acto de fijar las

condiciones de una apuesta influyen sobre nosotros más bien el amor y el temor del riesgo o circunstancias similares del todo ajenas, y no ese grado de confianza que corresponde a la noción más o menos intuitiva de probabilidad que nos hemos propuesto medir.

Ello sería evidentemente así si se tratara de hacer una apuesta única y bien determinada; no lo es en cambio si nos colocamos en las condiciones supuestas de un individuo que debe mantener un banco de apuestas sobre ciertos eventos, aceptando en las mismas condiciones cualquier apuesta a favor o en contra. Veremos que está constreñido entonces a respetar ciertas restricciones, que son los teoremas del cálculo de probabilidades. De otro modo, peca de *incoherencia*[7] y pierde *seguramente*, siempre que el adversario sepa explotar su error.

A un individuo que no comete tal error, esto es, que evalúa las probabilidades de un modo que no ponga a sus contrincantes en la situación de triunfar *con toda seguridad*, lo llamaremos *coherente*. Entonces, el cálculo de probabilidades no es otra cosa que la *teoría matemática que enseña a ser coherentes*.

6. Precisemos matemáticamente estos conceptos.

Para fijar las ideas nos referiremos primero a un ejemplo, a saber, el ejemplo ya mencionado de un certamen. Si entre los competidores hay dos italianos, digamos, A y B ¿cuál es la probabilidad de una victoria italiana?

Se trata de demostrar el teorema de las probabilidades totales. El evento "victoria italiana" es la suma lógica de los dos eventos incompatibles "victoria del competidor A" y "victoria del competidor B"; en otras palabras, aquel evento ocurre si y solo si se verifica una o la otra de estas dos hipótesis que se excluyen mutuamente. El teorema de las probabilidades totales dice entonces que la probabilidad p de una victoria italiana es la suma de las probabilidades p_A y p_B de la victoria de A y, respectivamente, de B; o sea que $p = p_A + p_B$.

Se ve fácilmente como esta conclusión se desprende inmediatamente del concepto recién explicado de *coherencia*. Supongamos que el individuo O que mantiene el banco estime en 0,60 la probabilidad de triunfo del competidor A y en 0,20 la probabilidad del competidor B, de modo que, conforme a la otra terminología citada, ofrezca apostar a 3 contra 2 por la victoria de A y a 1 contra 4 por la victoria de B. Entonces es necesario que estime la probabilidad de victoria italiana en 0,80, o sea, que apueste por Italia a 4 contra 1. En efecto, un jugador que compre a 60 liras un bono que gana 100 liras si triunfa A y a 20 liras un bono que gana 100 liras si triunfa B gasta 80 liras en dos bonos que juntos le pagan 100 liras en el caso de una victoria italiana. El individuo que mantiene el banco y que ha asignado probabilidades de 0,60 y 0,20, respectivamente, al triunfo de A y de B, comprometiéndose pues a aceptar

[7] [El original dice "*coerenza*" (p. 305); pero obviamente se trata de un error tipográfico. N. del T.]

apuestas con el público sobre estas bases, con ello se ha comprometido implícitamente a aceptar apuestas sobre la victoria italiana basadas en una probabilidad igual a 0,20 + 0,60 = 0,80, estimando pues implícitamente en 0,80 la probabilidad de una victoria italiana. ¿Qué sucedería si él no lo comprendiera y, sin respetar el teorema de las probabilidades totales, asignase al triunfo de Italia una probabilidad igual a 0,75 (esto es, si ofreciese apostar por la victoria italiana a 3 contra 1)? Ocurriría esto: que si un jugador apostara 100 liras por la victoria italiana, 100 contra el triunfo de *A* y 100 contra el triunfo de *B*, y pagara por ende 75 liras por un bono que gana 100 en caso de victoria italiana, y cobrara, respectivamente, 60 y 20 libras a cambio de la promesa de pagar 100 si triunfa *A* o si triunfa *B*, a fin de cuentas se estaría embolsando 5 liras, y quedaría libre de cualquier otra obligación, porque los eventuales triunfos y derrotas se compensarían en cualquier caso.

Tal es la circunstancia que quise suponer en la sección precedente para caracterizar la coherencia, cuando decía que quien no la respeta pone a sus contrincantes en la situación de triunfar con toda seguridad[8].

Es obvio además que la probabilidad de un evento cierto o imposible es igual a 1 o a 0, respectivamente, mientras que para un evento posible pero incierto ella está comprendida en el intervalo [0,1] (incluidos los extremos). En efecto, por un triunfo imposible no se apuesta nada; por ganar 100 liras con seguridad, o sea, por recibir 100 liras, no se puede ofrecer más de 100 liras; mientras que para ganar 100 liras en un caso dudoso no se podrá pagar una suma superior a 100 liras.

Por otra parte, cualquier asignación de probabilidades que satisfaga estas condiciones es coherente, como pronto demostraremos. En el caso precedente, es coherente cualquier individuo que atribuya a las probabilidades p_A, p_B, p valores no negativos no mayores que 1 y tales que $p_A + p_B = p$. Todas las ∞^2 opiniones diversas que cumplen con esta restricción son igualmente legítimas por sí mismas. De modo que el valor de la probabilidad es subjetivo (salvo que se admitiera que una cierta opinión merece sostenerse por una razón especial y se quiera por eso llamarla "objetivamente verdadera"), y sin embargo las leyes del cálculo están cabalmente determinadas (en este caso: el teorema de las probabilidades totales). Tendremos que destacar otros aspectos interesantes, que aclararán aún mejor el valor de las definiciones de probabilidad y coherencia que hemos dado; pero conviene primero retomar y completar las demostraciones precedentes, traduciéndolas a símbolos precisos. Advierto eso sí que las secciones correspondientes (7 al 9 inclusive) pueden ser omitidas sin perjuicio por quien no gusta de las fórmulas matemáticas y el simbolismo lógico.

8 [Apostar de esta manera es lo que llaman en inglés hacer un *Dutch book* (una cartilla holandesa), vale decir, una apuesta combinada en que uno de los jugadores lleva todas las de perder. Los casinos siempre le hacen una "cartilla holandesa" a sus clientes. Así, quien apuesta $1 a un número de ruleta en el mejor de los casos ganará $35, aunque 37/38 es su probabilidad de perder. Los clientes le dan al casino esta ventaja a sabiendas, como justa retribución por el placer de jugar. N. de. T.]

7. Un evento E es una proposición, una afirmación, que no sabemos aún si es verdadera o falsa; el evento cierto y el evento imposible pueden considerarse como casos límites. Por ejemplo, cuando se apostaba a la victoria de uno u otro de los competidores de un certamen, los eventos considerados eran las proposiciones: E_A = "En el certamen triunfará A", E_B = "En el certamen triunfará B", E = "En el certamen triunfará un italiano". El evento E es, en este ejemplo, *la suma lógica* de E_A y E_B (y escribiremos: $E = E_A + E_B$)[9]. En general, llamaremos *suma lógica* de los eventos E' y E'' al evento $E' + E''$ que es *verdadero* si es verdadero E' o E'', y es *falso* si E' y E'' son ambos falsos. Llamaremos *producto lógico* de los eventos E' y E'' y designaremos con $E' \cdot E''$ al evento que es *verdadero* si E' y E'' son ambos verdaderos y es *falso* si E' o E'' es falso. Si $E' \cdot E''$ es imposible, los eventos E' y E'' se dicen *incompatibles* (como lo son, por ejemplo, los eventos E_A y E_B del ejemplo: $E_A \cdot E_B$ significa que tanto A como B ganan el certamen, lo que es contradictorio). A continuación se indica con $—E$ el contrario o *negación* de E, esto es, el evento que es verdadero o falso según que E sea falso y verdadero[10]. Así $—E_A$ significa: el competidor A no ganará el certamen. Tal vez no sea inútil advertir lo que significa decir que dos eventos son iguales. E' es igual a E'', $E' = E''$, si decir que ocurre E' equivale a decir que ocurre E'', o sea, que no es posible que uno solo de ellos resulte verdadero y el otro falso.

Formalmente, el problema que nos hemos propuesto es el siguiente. La opinión de un individuo, cuyo estado de ánimo se halla en espera de ciertos eventos futuros, se caracteriza por las probabilidades que les atribuye, esto es –si $P(E)$ designa la probabilidad con que espera la realización del evento E– por una función numérica $P(E)$ de los eventos E del conjunto que él considera. El problema consiste en caracterizar analíticamente aquellas funciones $P(E)$ que corresponden a estados de ánimo coherentes, esto es, a asignaciones de probabilidad que no sean intrínsecamente contradictorias.

Veamos sin más dilación qué significa esto en términos precisos. Asignar al evento E una probabilidad igual a p significa, para quien mantiene el imaginado banco de apuestas, declararse dispuesto a aceptar toda apuesta con un jugador cualquiera que es libre de fijar a su gusto la postura S (positiva o negativa) de modo que la ganancia G (positiva o negativa) del jugador resulte ser

$$G(E) = (1 - p)S$$
$$G(—E) = - pS$$

9 La notación de Peano, Russell, etc. es $E_A \cup E_B$ para la suma lógica y $E_A \cap E_B$ para el producto lógico. En nuestro caso no existe el peligro de ambigüedad que en otros campos hace necesario el uso de símbolos diferentes y podremos, pues, por comodidad tipográfica, indicar la suma lógica con + y el producto lógico con el punto. [Después que de Finetti redactó esta nota en 1931, se ha estabilizado la notación $E_A \vee E_B$ para la "suma lógica" o disyunción y $E_A \wedge E_B$ para el "producto lógico" o conjunción, y, gracias a la computadora de mesa, su uso no ocasiona al tipógrafo ninguna incomodidad; sin embargo, por fidelidad histórica, mantengo la notación adoptada por de Finetti. N. de. T.]

10 [En la notación de Peano y Russell la negación de E se denota con $\sim E$; posteriormente se ha popularizado la notación de Hilbert: $\neg E$. N. del T.]

en los dos casos E y —E, esto es, en la hipótesis de que el evento E ocurra o, respectivamente, no ocurra. Un individuo es coherente al asignarle probabilidades a ciertos eventos si, cualquiera que sea el grupo de posturas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que un jugador apuesta a un conjunto cualquiera de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ en los que aquél ha considerado, no es posible que la ganancia G del jugador resulte *positiva en todo caso.*

Cuando se trata de apuestas sobre un evento único E se ve enseguida que una condición necesaria y suficiente para la coherencia es la de atribuir a $p(E)$ un valor único no negativo y no mayor que 1. En particular, si el evento E es cierto o imposible, entonces es necesario para la coherencia asignarle una probabilidad igual a 1 o a 0, respectivamente.

Demostrémoslo. Si E es cierto, E es el único caso posible, y la única ganancia posible es

$$G(E) = (1-p)S.$$

Si $1-p \neq 0$ es posible elegir S de modo que $G(E) = (1-p)S$, y la condición $p = 1$ es necesaria. En cambio, si $p = 1$, $G(E) = 0$ siempre, lo cual asegura la coherencia. Y la condición también es suficiente.

Análogamente, si E es imposible, el único caso posible es —E y la única ganancia posible es $G(—E) = -pS$[11]. Para la coherencia es necesario y suficiente que sea $p = 0$.

Si no estamos en posición de excluir a priori ninguna de las dos eventualidades, son efectivamente posible los dos casos E y —E y las dos ganancias posibles son

$$G(E) = (1-p)S$$
$$G(—E) = -pS.$$

Supongamos ahora que uno atribuye a la probabilidad de E dos valores distintos p' y p''; esto significa que se está dispuesto a aceptar apuestas tanto sobre la base de la primera como de la segunda asignación, con posturas S' y S'' al arbitrio del contrincante. Tendremos entonces las dos ganancias posibles

$$G(E) = (1-p')S' + (1-p'')S''$$
$$G(—E) = -p'S' - p''S''.$$

Si

$$\begin{vmatrix} 1-p' & 1-p'' \\ -p' & -p'' \end{vmatrix} = p' - p'' \neq 0$$

[11] [El original dice: "e l'unico guadagno possibile $G(-E) = pS$" (p. 309). La omisión del signo menos al lado derecho de la ecuación es sin duda un error tipográfico. N. del T.]

siempre es posible determinar S' y S'' de modo que $G(E)$ y $G(—E)$ adopten valores prefijados, en particular valores que sean ambos positivos, lo cual es absurdo en la hipótesis de la coherencia. Un individuo coherente no puede atribuirle a la probabilidad de un evento dado más que un valor único, que debe estar comprendido entre 0 y 1 (incluidos los extremos). Si fuese $p < 0$, sería $1 - p > 1 > 0$, y, con tal de tomar $S > 0$ se tornarían positivas tanto $G(E)$ como $G(—E)$; lo mismo ocurriría si $p > 1$ y por ende $1 - p < 0$ con tal de tomar $S < 0$. Condición necesaria para que la evaluación de la probabilidad de un evento singular indeterminado sea coherente es pues que a tal probabilidad se le dé un valor unívocamente determinado p y que sea $0 \leq k \leq 1$. Demostremos que esta condición también es suficiente. Basta observar que, como quiera que se elija S, siempre es

$$pG(E) + (1 - p)G(—E) = p(1 - p)S - (1 - p)pS = 0;$$

si $0 \leq p \leq 1$, tenemos que $p \geq 0$, $1 - p \geq 0$, y por ende, como quiera que se elija S, $G(E)$ y $G(—E)$ no pueden nunca ser ambas positivas.

8. Pasemos a demostrar el teorema de las probabilidades totales.

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eventos incompatibles; se trata de demostrar que

$$P(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n);$$

en particular, será entonces

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$$

si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es una clase *completa* de eventos incompatibles, esto es, si es seguro que uno u otro de ellos tiene que realizarse (el evento $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ es *cierto*). Por lo demás, basta dar la demostración limitada a este último caso, porque, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ no constituyera una clase completa, siempre lo es la clase $E_0, E_1, \ldots, E_n$, donde $E_0 = —(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)$, que se obtiene agregando a las alternativas precedentes la siguiente alternativa: que ninguna de aquellas se realice. Suponiendo entonces que la suma de las probabilidades de una clase completa de eventos incompatibles deba dar 1, tenemos por una parte que

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$$

y por otra que

$$P(E_0) + P(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = 1$$

puesto que también la clase de los dos eventos incompatibles E_0 y $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)$ es completa; de donde resulta que

$$P(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n).$$

Es obvio que basta limitarse al caso en que los eventos son todos posibles; aquellos que fuesen eventualmente imposibles pueden en efecto ignorarse sin alterar nada. Por ejemplo, si E_1 fuese imposible sería $P(E_1) = 0$, $E_1 + E_2 + \ldots + E_n = E_2 + \ldots + E_n$, y la relación precedente equivaldría a $P(E_2) + \ldots + P(E_n) = P(E_2 + \ldots + E_n)$.

Se trata de demostrar, pues, que si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es una clase completa de eventos posibles incompatibles, sus probabilidades, que designaremos con $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tienen una suma igual a 1. Quien apueste a tales eventos las posturas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, obtendría –para los diversos casos posibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$–, las ganancias $G_1 = G(E_1)$, $G_2 = G(E_2), \ldots, G_n = G(E_n)$, dadas por

$$G_1 = S_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$$

$$G_2 = S_2 - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$$

....

$$G_n = S_n - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$$

Si $G_1, G_2, \ldots, G_n$ están dadas, este es un sistema de ecuaciones lineales en $S_1, S_2, \ldots, S_n$, cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & 1-p_2 & \cdots & -p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & 1-p_n \end{vmatrix} = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n);$$

por lo tanto, a menos que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, siempre es posible determinar las S de modo que las G asuman valores predeterminados, y en particular valores que sean todos positivos. (Y bastaba por lo demás observar que, tomando $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S$, resulta que $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = (1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_n)S$, y por lo tanto todas las G resultarían > 0 con tal de tomar $S > 0$ o[12], respectivamente, $S < 0$, según que la suma de las probabilidades fuera menor o mayor que 1: este es en suma el razonamiento intuitivo desarrollado en la sección 6). Para la coherencia es necesario pues que valga el teorema de las probabilidades totales.

También es suficiente. Multiplicando $G_1 = G_2 = \ldots = G_n$ por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y sumando, se obtiene en seguida

12 [El original dice: "e quindi tutte le G risulterebbero > 0 pur di prendede $S > 0$" (p. 311); yo leo: "pur di prendere". N. del T.]

$$\sum_{h=1}^{n} p_h G_h = \sum_{h=1}^{n} p_h \left(S_h - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i \right) = \sum_{h=1}^{n} p_h S_h - \left(\sum_{h=1}^{n} p_h \right) \sum_{i=1}^{n} p_i S_i = \left(1 - \sum_{h=1}^{n} p_h \right) \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$$

y por lo tanto, si $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ resulta siempre que $\sum_{h=1}^{n} p_h G_h = 0$, cualesquiera que sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Como las p_i son todas ≥ 0, la relación asegura que las G_h no pueden nunca ser todas positivas[13].

Un individuo coherente puede, pues, estimar la probabilidad de n eventos incompatibles que constituyen una clase completa, esto es, de n eventos de los cuales necesariamente se ha de realizar uno y solo uno, en *cualquiera* de los ∞^{n-1} modos que se obtienen atribuyendo a esas probabilidades valores no negativos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ cuya suma es igual a 1, y *de ningún otro* modo. La elección de uno u otro de estos sistemas de valores igualmente legítimos por sí mismos depende de la opinión del individuo, y es subjetiva. De todos modos, si se quisiera sin embargo atribuir un valor objetivo a las razones para esta elección, el caso es que no dependen de las condiciones de coherencia.

Agreguemos aún, como corolarios, las dos observaciones siguientes.

Las probabilidades de dos eventos contrarios E y $—E$ son complementarias (con respecto a 1): $P(—E) = 1 - P(E)$. En efecto, E y $—E$ constituyen una clase finita y completa de eventos incompatibles.

Si E implica E', esto es, si E' es una consecuencia necesaria de E, o, en símbolos, si $E - E'$ es imposible, entonces la probabilidad de E no es mayor que la probabilidad de E' : $P(E) \leq P(E')$.

En efecto, tenemos que $E' = E + (E' - E)$, y los dos eventos son incompatibles. Entonces, $P(E') = P(E) + P(E' - E) \geq P(E)$.

9. Sea $\mathscr{E}$ el conjunto (finito o infinito) de los eventos E que contempla un individuo dado y cuyas probabilidades $P(E)$ evalúa. Por la coherencia sabemos que es necesario que la función $P(E)$ posea las dos propiedades siguientes:

1) Cualquiera que sea el evento $E \in \mathscr{E}$, resulta que $0 \leq P(E) \leq 1$;
2) Cualesquiera que sean los eventos incompatibles $E_1, E_2 \in \mathscr{E}$, resulta que

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

13 [El original trae "p_1" y "G_n" (p. 312); se trata, sin duda, de errores tipográficos, pues los índices, cuando se habla de *las* probabilidades p y *las* ganancias G, tienen que ser *variables*, como i o h, no *constantes*, como 1 o n. N. del T.]

Además, naturalmente, deben ser $P(E) = 1$ y $P(E) = 0$ cuando E es cierto o, respectivamente, imposible.

Demostremos que estas condiciones son asimismo suficientes.

Para evitar cuestiones, interesantes por sí mismas, pero que sería demasiado largo desarrollar[14], supondremos que el conjunto $\mathscr{E}$ sea tal que contenga siempre la suma y el producto de cualquier par de sus elementos, y el contrario de cada elemento. Esto es, tal que, si E es un evento de $\mathscr{E}$, lo es también el evento $-E$, y si E' y E'' son elementos de $\mathscr{E}$, también lo son $E' + E''$ y $E' \cdot E''$. Esto implica que un evento expresable mediante un número finito de eventos $E_1,\ldots, E_n$ de $\mathscr{E}$ y los signos de negación, suma y producto lógico aún pertenece a $\mathscr{E}$; un conjunto $\mathscr{E}$ que no satisfaga inicialmente esta condición puede siempre reducirse a satisfacerla agregándole los eventos que son expresables de este modo mediante un número finito de eventos de $\mathscr{E}$.

Para probar que dichas condiciones son suficientes para la coherencia debemos demostrar que, si la función $P(E)$ las satisface, un jugador no puede escoger ningún sistema de apuestas y posturas basado en la función de probabilidad $P(E)$ que le asegure una ganancia en cualquier caso. La demostración es inmediata. Supongamos que apostando las posturas $S_1, S_2,\ldots, S_n$ a los eventos $E_1, E_2,\ldots, E_n$ de $\mathscr{E}$ la ganancia sea segura. Los eventos $E_1, E_2,\ldots, E_n$ pueden expresarse como sumas de *constituyentes* (esto es, de los eventos que se obtienen a partir del producto lógico $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ reemplazando un número cualquiera de factores por el evento contrario) que forman una clase completa de eventos incompatibles $C_1, C_2,\ldots, C_m$ en número finito ($m = 2^n$, contando también los eventos eventualmente imposibles). Si E_1 es la suma lógica de los h constituyentes $C_{i_1}, C_{i_2},\ldots, C_{i_h}$, apostar a E_1 con postura S_1, equivale a hacer h apuestas, todas con postura S_1, a los h eventos $C_{i_1}, C_{i_2},\ldots, C_{i_h}$ (en ambos casos, si designamos con p la probabilidad de E_1, tenemos que $G(E_1) = (1 - p)S_1$, $G(-E_1) = -pS_1$). Un sistema de apuestas sobre $E_1, E_2,\ldots, E_n$ equivale pues siempre a un sistema de apuestas sobre constituyentes $C_1, C_2,\ldots, C_m$ que forman una clase incompatible completa, y sabemos que si $P(C_1) + P(C_2) +\ldots+ P(C_m) =1$ y las cantidades $P(C_i)$ son todas ≥ 0, un sistema de apuestas así no puede jamás dar lugar a una ganancia segura. Pero la propiedad aditiva para dos eventos incompatibles implica obviamente la misma propiedad para un número finito cualquiera de eventos incompatibles. Lo que prueba el aserto.

El sentido de esta demostración y de las precedentes se podría resumir y hacer intuitivo en dos palabras si se pudiera desde ahora suponer un conocimiento aunque sea elementalísimo de la teoría de las variables aleatorias[15]. El teorema de las

[14] Véase la nota citada en los Lincei [arriba, nota 1 – N. del T.]

[15] [Llámase *variable aleatoria* a una función f con valores reales definida en el espacio de eventos $\mathscr{E}$. Basándose en las probabilidades p asignadas a los eventos de $\mathscr{E}$, cabe determinar la probabilidad $\mathbf{p}$ de que f tenga tal o cual valor, o tenga un valor en tal o cual intervalo. Por ejemplo, si hay y solo tres eventos E_1, E_2 y E_3 tales que $f(E_1) = f(E_2) = f(E_3) = 25$, la probabilidad $\mathbf{p}(f(x) = 25)$ de que la función f tenga el valor 25 es igual a $p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$. No es difícil probar que la función $\mathbf{p}$ obedece a las leyes del cálculo de probabilidades. N. del T.]

probabilidades totales asegura que para la esperanza matemática (o valor medio) de una variable aleatoria vale la propiedad distributiva $\mathcal{M}(X + Y) = \mathcal{M}(X) + \mathcal{M}(Y)$; en una apuesta equitativa, la esperanza matemática es cero, y por ende, los valores posibles de la ganancia no pueden ser todos positivos (pues el promedio ponderado de los valores positivos es positivo); por consiguiente también en un sistema de apuestas equitativas la esperanza matemática de la ganancia (que es la suma de las ganancias parciales con esperanza matemática igual a cero) tiene esperanza matemática cero, y los valores posibles no pueden ser todos positivos.

Observemos de paso, aunque este no es el sitio para tratar tales asuntos, que para una clase infinita de eventos incompatibles (aunque sea numerable) no es necesario que valga la propiedad análoga a la propiedad aditiva. La probabilidad de la suma lógica de infinitos eventos incompatibles no es pues necesariamente igual, sino igual *o mayor* que la suma de las probabilidades (límite superior de la suma de los términos en número finito).

10. Retomemos ahora la exposición que interrumpimos por un momento para precisar con el debido rigor lógico-formal los resultados y los mismos problemas.

Nos proponemos ante todo deducir de la definición dada criterios más útiles prácticamente para la efectiva evaluación numérica de una probabilidad, más bien que la aplicación directa e inmediata del esquema de las apuestas. Estos criterios no son más que los que ordinariamente se adoptan para definir la probabilidad; veremos sin embargo que ellos no pueden desempeñar tal función, pues tienen sentido solamente si ya se ha demostrado previamente la propiedad fundamental de la teoría de las probabilidades. Esto se comprueba precisamente del modo más simple continuando la exposición desarrollada hace poco, pero cuyo genuino carácter iluminaremos mejor investigando qué resta de verdaderamente esencial en nuestro modo de proceder y de razonar cuando se lo desvincula del esquema de apuestas señalado.

Cuando podemos distinguir n casos que (constituyendo una clase completa) nos parecen igualmente probables y de los cuales, por esto, no podríamos esperar uno con mayor o menor confianza que otro cualquiera, la probabilidad de cada uno de ellos es $1/n$. Y la probabilidad de la suma lógica de m de estos casos –esto es, de un evento E al cual m casos son favorables y $(n - m)$ desfavorables– es m/n. Esta propiedad, adoptada generalmente como definición, es un corolario inmediato de la propiedad aditiva; si n números iguales suman 1, el valor común de todos ellos es $1/n$ y la suma de m entre ellos es igual a m/n.

La importancia de este resultado no reside solo en las abundantes aplicaciones que permite a problemas de juegos, de loterías, de sorteos, en que justamente se presentan casos posibles en número finito que, por razones de simetría muy espontáneas, son igualmente probables para todos o casi todos los individuos; ello es importante porque da la posibilidad de evaluar numéricamente, esto es, cuantitativamente una probabilidad sobre la sola base de consideraciones cualitativas. Basta admitir que uno sabe decir siempre, sobre la probabilidad de dos eventos, si son iguales o si una es mayor o menor que la otra, para lograr cabalmente medir una probabilidad cualquiera.

En efecto, es fácil construir una escala de comparación que contenga todos los valores racionales de la probabilidad: si $p = m/n$, p es la probabilidad de extraer una bola blanca de una urna que contiene m bolas blancas sobre un total de n, cuando todos los casos se juzgan igualmente probables; según que un evento E nos inspira mayor o menor o igual confianza que dicha extracción, la probabilidad que le atribuimos es mayor que, menor que o igual a p. Y un número real es determinado unívocamente cuando, para cualquier número racional r, sabemos siempre decir cuál de estas tres alternativas se cumple: $p = r, p < r, p > r$.

Para nuestro análisis crítico, la importancia fundamental de este resultado radica en lo siguiente: el mismo prueba que el esquema de apuestas en que se basa nuestra definición nos lleva efectivamente a medir la probabilidad, esto es, a medir el grado de confianza que siente un individuo, y no está influido, como sucedería con una apuesta aislada, por el amor o el temor del riesgo o por otras circunstancias accesorias. Se podría dudar, por ejemplo, si un individuo, aunque juzgue igualmente probables n casos de los cuales m son favorables y $(n - m)$ son desfavorables a cierto evento E, podría luego, por amor o miedo al riesgo al que se expondría, no estar dispuesto a apostar al evento E sobre la base de la probabilidad m/n, pero estuviera dispuesto a apostar solo a base de un valor p más grande o más pequeño. Según lo que recién se ha visto, esto nunca puede ocurrir con un individuo coherente.

Puesto que la medición de una probabilidad se puede obtener mediante consideraciones solamente cualitativas, se nos ocurre espontáneamente que la misma definición podría reemplazarse con otra de puro carácter cualitativo. Llegaremos precisamente a tal conclusión, como por lo demás ya lo habíamos anunciado; lo veremos en las próximas secciones.

11. Cabe preguntarnos si era lícito poner a priori, convencionalmente, igual a m/n la probabilidad que se atribuye a un evento cuando m y $n - m$ casos incompatibles, que le son respectivamente favorables y contrarios, se juzgan igualmente probables. Si es lícita, esta convención sería suficiente, como hemos observado, para definir cabalmente el método usual de medir numéricamente una probabilidad (sea racional o irracional), con tal de que se considere establecido el significado psicológico de la afirmación: "el evento E_1 es, para mí, más probable que el evento E_2", o, en otras palabras, "tengo mayor confianza en que se verifique E_1 más bien que E_2", u otras locuciones equivalentes. Se ve enseguida que no puede tratarse de una convención absolutamente libre, en cuanto observamos que, para lograr el alcance que cada método de medición se propone, ella debe efectivamente atribuir valores mayores a las probabilidades de los eventos "más probables": cualquier medida numérica de la probabilidad de un evento que se quiera introducir debe ser una función numérica $P(E)$ que satisfaga la condición de que la desigualdad

$$P(E_1) \leq P(E_2)$$

equivalga a decir, conforme al sentido que ya se supone establecido, que "E_2 no es menos probable que E_1".

El método usual de definir la probabilidad como relación entre el número de los casos favorables y el de los posibles (que se suponen igualmente probables) no puede pues enunciarse legítimamente sino después de haber demostrado que, si un evento E_1 tiene m_1 casos favorables entre n_1 posibles e igualmente probables, y otro evento E_2 tiene m_2 casos favorables entre n_2 posibles e igualmente probables[16], el evento E_1 no es menos probable que E_2 si $m_1 n_2 \geq m_2 n_1$, y a la inversa. En otras palabras –para dejar bien claro este punto tan esencial–, no puede enunciarse sino después de haber analizado, explicado y reconocido como exhaustivos los motivos lógicos por los cuales un individuo que tenga ante sí dos urnas A_1 y A_2, que contienen respectivamente n_1 y n_2 bolas, de las cuales m_1 y m_2 son blancas, está constreñido, *para mantenerse coherente*, a estimar más probable la extracción de una bola blanca de la urna en que el porcentaje de bolas blancas es mayor, *en caso de que él estime igualmente probable la extracción de cualquier bola de cada una de las dos urnas.*

La condición así expresada no es muy significativa, porque el método ordinario de definir la probabilidad mediante una relación de este tipo es sumamente poco significativo y muy banal. Pero –como será fácil hacer ver, y resulta casi intuitivo a la luz de lo que sigue– ella equivale en suma a otra condición de significado notabilísimo y fundamental, que es la verdadera y única base lógica del cálculo de probabilidades.

12. Para lograr ver su significado del modo más intuitivo, supongamos primeramente ya conocida la exposición arriba desarrollada y busquemos cuál sería el modo más general de medir la probabilidad en el sentido antedicho. Veremos en segundo lugar que las condiciones a que se llega, que tienen un carácter pura y esencialmente cualitativo, se pueden justificar directamente de la manera más espontánea, y que partiendo de ellas se puede reconstruir el cálculo de probabilidades en su forma usual, con todo rigor. Con ello quedará completamente justificado independientemente del esquema de apuestas sobre el cual nos hemos basado en un primer momento.

Sea $P(E)$ la probabilidad de un evento E en el sentido usual, que ya hemos justificado. Con arreglo a lo dicho, la función real más general $Q(E)$ que represente una medida posible de la probabilidad deberá ser tal que del hecho que $P(E') \leq P(E'')$ resulte que $Q(E') \leq Q(E'')$ y viceversa. De ello se sigue que, si $P(E) = x$, entonces $\xi = Q(E) = \varphi(x)$, con $\varphi(x)$ una función creciente de x. Y tendremos que $x = \varphi^{-1}(\xi)$, donde φ^{-1}, la inversa de φ, es también una función creciente. A continuación nos limitaremos al caso más interesante en que la φ (y por ende la φ^{-1}) es continua: observemos que lo es necesariamente si se quiere que todos los valores del intervalo (ω, τ) –donde $\omega = \varphi(0)$ y $\tau = \varphi(1)$ son, respectivamente, la probabilidad de un evento imposible o cierto– sean valores capaces de representar una probabilidad $Q(E)$.

16 [El original dice: "e un altro evento E_2 ha m_1 casi favorevoli su n_2 possibli e ugualmente probabili" (p. 316). El contexto indica que en vez de "m_1" debe decir "m_2". Adviértase de paso el error de ortografía en la palabra "possibili"; el original contiene varios errores como este, que generalmente no menciono. N. del T.]

Sea entonces

$$x + y = z;$$

de ello se desprende que

$$\varphi(x + y) = \varphi(z),$$

y si ponemos

$$\varphi(x) = \xi,\ \varphi(y) = \eta,\ \varphi(z) = \zeta,$$

tenemos que

$$\zeta = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)].$$

El teorema de las probabilidades totales se traduce entonces en la existencia de una ley de adición más general para la función Q; si una función Q es capaz de representar la probabilidad, existe una función S de dos variables tal que, si ella asume, para dos eventos incompatibles E' y E'', los valores $Q(E') = \xi$ y $Q(E'') = \eta$, resulta necesariamente que

$$Q(E' + E'') = S(\xi,\eta).$$

La función S goza evidentemente de las siguientes propiedades (en el intervalo en que basta suponerla definida, esto es, entre ω y τ):

(1) Es *simétrica*; cualesquiera que sean ξ y η, se tiene siempre que $S(\xi,\eta) = S(\eta,\xi)$;

(2) ω es *cero con respecto a* S: si una de las variables asume el valor ω, S asume el valor de la otra variable:

$$S(\omega,\xi) = \xi \text{ (y, por ende, } S(\xi,\omega) = \xi);$$

(3) es una función *creciente* de las dos variables; en particular, siempre es $S(\xi,\eta) > \xi$ y $S(\xi,\eta) > \eta$ (a menos ξ o η sea $= \omega$);

(4) es *continua*;

(5) es *asociativa*: cualesquiera que sean ξ, η, ζ, se tiene que

$$S[S(\xi,\eta),\zeta) = S[\xi, S(\eta,\zeta)] \text{ (y, por ende, } = S[\eta, S(\xi,\zeta)], \text{ etc.)};$$

(6) es *arquimédica*, en el sentido que, por pequeño que se elija ξ (aunque vecino a la derecha de ω), calculando $\xi_2 = S(\xi,\xi)$, $\xi_2 = S(\xi_2,\xi), \ldots, \xi_{n+1} = S(\xi_n,\xi)$, tras un número finito de operaciones (que evidentemente dan siempre números cada vez mayores), se obtiene un valor mayor que τ.

Estas propiedades son una traducción de las propiedades análogas de la suma: $x + y = y + x$; $x + 0 = x$; $x + y > x + z$ si $y > z$; $(x + y) + z = x + (y + z)$; $nx > 1$, por pequeño que se fije $x > 0$, con tal de tomar n suficientemente grande. Es importante reconocer que las condiciones arriba enumeradas son también suficientes, vale decir, que si se indica una función S que las satisfaga y un número τ tal que se cumpla la condición (6), siempre es posible determinar una función $Q(E)$ apta para medir las probabilidades que se atribuyan a los eventos E y cuya ley de adición esté dada por S. Más aún, la función $Q(E)$ está unívocamente determinada; en efecto, la función creciente $\varphi(x)$ tal que $S(\xi,\eta) = \varphi\,[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$ está unívocamente determinada y entonces $Q(E) = \varphi\,\{P(E)\}$.

Póngase

$$\psi_2(\xi) = S(\xi,\xi),\ \ \psi_2(\xi) = S(\psi_2(\xi),\xi),\ldots,\ \psi_{n+1}(\xi) = S(\psi_n(\xi),\xi),\ldots;$$

obsérvese, para no perder de vista el significado, que $\psi_n(\xi)$ es la probabilidad de la suma lógica de n eventos incompatibles de probabilidad igual a ξ. De las propiedades enunciadas se sigue fácilmente que las $\psi_n(\xi)$ constituyen una sucesión creciente de funciones crecientes: tenemos que $\psi_n(\omega) = \omega$, y para $\xi > \omega$, $\xi < \psi_2(\xi) < \psi_3(\xi) < \ldots < \psi_n(\xi) < \ldots$; siendo $\omega \leq \xi \leq \tau$, siempre existe un y solo un valor η, tal que $\omega \leq \eta \leq \tau$, que es raíz de la ecuación $\psi_n(\eta) = \xi$; indicaremos con $\psi_{1/n} = \psi_n^{-1}$ la operación inversa de ψ_n, de modo que podrá escribirse $\eta = \psi_{1/n}(\xi)$. La condición (5) muestra que se puede poner $\psi_{m/n}(\xi) = \psi_m[\psi_{1/n}(\xi)]$ (donde el segundo miembro resulta ser función continua y creciente de la razón m/n), y resulta que, si r y s son dos números racionales cualesquiera, $\psi_r[\psi_s(\xi)] = \psi_{rs}(\xi)$, $S[\psi_r(\xi), \psi_s(\xi)] = \psi_{r+s}(\xi)$.

En virtud de la continuidad, la función $\varphi_x(\xi)$ está definida para cualquier número real x, y es una función real continua que crece de ω a ξ cuando x varía entre 0 y 1; en particular, para $\xi = \tau$, la función $\psi_x(\tau)$ crece de ω a τ cuando x varía entre 0 y 1. Pongamos $\varphi(x) = \psi_x(\tau) = \xi$ y $x = \varphi^{-1}(\xi)$; resulta enseguida que, si $\xi = \varphi(x)$ y $\eta = \varphi(y)$, tenemos que

$$S(\xi,\eta) = S[\varphi(x),\varphi(y)] = S[\psi_x(\tau),\psi_y(\tau)] = \psi_{x+y}(\tau) = \varphi(x+y) = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$$

y resultan satisfechas todas las propiedades que nos hacían falta[17].

17 Se obtiene un ejemplo simple poniendo $S(\xi,\eta) = \xi + \eta + a\xi\eta$; tal vez vale la pena señalar este caso porque Medolaghi lo ha estudiado como una posible corrección que hacer al teorema de las probabilidades totales. Estamos en condiciones ahora de excluir que una modificación tal modifique el significado de ningún teorema del cálculo de probabilidades: todo se reduce a medir con el número $\xi = (1/a)(e^{ax} - 1)$ aquel grado de probabilidad que ordinariamente se mide con el número x. A este resultado se llega fácilmente observando que en tal caso la ecuación funcional

$$\varphi(x+y) = S\,[\varphi(x),\varphi(y)] = \varphi(x) + \varphi(y) + a\varphi(x)\varphi(y)$$

equivale a la ecuación diferencial. La constante a depende del valor $\varphi(1) = \tau$ con que se quiere medir la probabilidad de un evento cierto, y es precisamente $a = \log(1 + a t)$.

La transformación de la ecuación funcional original en una ecuación diferencial es obviamente posible siempre cuando la función S es diferenciable. En efecto, si ponemos que $\frac{\partial S(\xi,\eta)}{\partial\eta} = f(\xi,\eta)$, tenemos entonces que $d\varphi = k\cdot f(\varphi,\omega)dx$, con $k = \varphi'(o)$.

13. Hemos visto que en la forma ordinaria del cálculo de probabilidades la propiedad fundamental es el teorema de las probabilidades totales. Este depende sin embargo del método particular de representar la probabilidad mediante números reales que corresponde justamente a la convención usual. Convención que es por cierto la más cómoda, pero nada más que la más cómoda entre infinitas otras igualmente legítimas. Lo que el teorema contiene de verdadera y esencialmente significativo es lo que no depende de esta convención; para reconocer y separar esta parte esencial de todo lo que es accesorio, hemos procedido a investigar, en la sección precedente, qué permanecía inalterado por cualquier otro método de medición posible. Ello era, como acabamos de ver, la existencia de una ley de adición que da la probabilidad de la suma lógica de dos eventos incompatibles en función de la probabilidad de estos eventos. Se ha procedido –por hacer una analogía– como se suele hacer para mostrar el significado absoluto de algún resultado geométrico: mostrando que vale con cada sistema de coordenadas. Pero hay también otro método, que consiste en estudiar el problema independientemente de todo sistema de coordenadas, por la vía axiomática e intrínseca. Este es el método más concluyente y lo seguiremos aquí para dejar más en claro cuál es la propiedad cualitativa fundamental en que se basa todo el cálculo de probabilidades. En esta sección nos limitaremos al solo aspecto formal; a continuación veremos cómo desentrañar el significado efectivo de eso que aquí consideraremos como postulados y reconocer que ello basta para justificarlos.

Supongamos establecida la noción de la relación *"no es menos probable que"* entre dos eventos, e indiquemos con la notación $E' \geq E''$ la frase (proposición) "E' no es menos probable que E''." La relación "$\geq$" satisface los postulados siguientes:

(1) *dados dos eventos E'* y *E'', siempre es $E' \geq E''$ o bien $E'' \geq E'$*; si son a la vez $E' \geq E''$ y $E'' \geq E'$ se escribe $E' \cong E''$ y se dice que E' y E'' son idénticamente probables (en particular, pues, siempre es $E \cong E$); si $E' \geq E''$ pero no es $E'' \geq E$ se escribe $E' > E''$;

(2) *si A es un evento cierto y B es un evento imposible, para todo evento posible E (que no sea cierto ni imposible) se tiene que $A > E > B$;*

(3) *si $E' \geq E$ y $E \geq E''$, también $E' \geq E''$* (propiedad transitiva); se sigue obviamente que $E' \cong E$, $E \cong E''$ implica que $E' \cong E''$;

(4) *si E_1 y E_2 son dos eventos incompatibles con un evento E y*

$$E_1 \geq E_2$$

también es

$$E + E_1 \geq E + E_2$$

y a la inversa. $E + E_1$ es pues $>, \cong, <$ que $E + E_2$ según que E_1 sea $>, \cong, <$ que E_2.

De este postulado se deduce fácilmente[18] una propiedad análoga pero más general, a saber,

(4) si E y E_1 son incompatibles y E' y E'_1 son incompatibles, para que sea $(E + E_1) \geq (E' + E'_1)$ es necesario que se cumpla al menos una de las dos condiciones $E \geq E'$, $E_1 \geq E'_1$; y es suficiente que se cumplan ambas.

Los primeros tres postulados tienen un significado tan banal que no hace falta hablar de ellos aquí; la propiedad esencial está dada por el postulado (4) o mejor dicho por el (4′), y ella es justamente la que habíamos encontrado antes bajo otras formas. En particular, ella dice en efecto que si (bajo las mismas hipótesis) se tiene que $E \cong E'$ y $E_1 \cong E'_1$, también $(E + E_1) \cong (E' + E'_1)$; es decir, que la probabilidad de la suma de eventos incompatibles es "función" de la probabilidad de los eventos

18 Observemos entre tanto que el postulado (4) cae bajo el (4′) como caso particular cuando $E = E'$. Supongamos pues, para hacer una primera generalización, que E, E_1, E', E'_1 sean cuatro eventos incompatibles, y sea

$$E \geq E', \; E_1 \geq E'_1;$$

el postulado (4) da en seguida

$$E + E_1 \geq E + E'_1 \geq E' + E'_1;$$

y, en consecuencia, por el postulado (3)

$$E + E_1 \geq E' + E'_1;$$

mientras que, si fuese $E' > E$, $E'_1 > E_1$, se obtendría análogamente

$$E' + E'_1 > E + E_1.$$

Pasemos ahora al caso general y escribamos

$$E = EE' + E(-E'), \; E_1 = E_1E'_1 + E_1(-E'_1),$$
$$E' = EE' + E'(-E), \; E'_1 = E_1E'_1 + E'_1(-E_1);$$

tendremos que

$$E + E_1 = (EE' + E_1E'_1) + E(-E') + E_1(-E'_1),$$
$$E' + E'_1 = (EE' + E_1E'_1) + E'(-E) + E'_1(-E_1);$$

Si es $E = EE' + E(-E') \geq E' = EE' + E'(-E)$, el postulado (4) da en seguida que $E(-E') \geq E'(-E)$, y análogamente si $E_1 \geq E'_1$ se deduce que $E_1(-E'_1) \geq E'_1(-E_1)$. Los cuatro eventos $E(-E')$, $E'(-E)$, $E_1(-E'_1)$, $E'_1(-E_1)$ son manifiestamente incompatibles, y la demostración precedente permite concluir de las desigualdades obtenidas que también

$$E(-E') + E_1(-E'_1) \geq E'(-E) + E'_1(-E_1).$$

Aplicando directamente una vez más el postulado (4) y recordando la descomposición precedente de $E + E_1$ y $E' + E'_1$, se ve enseguida que $E + E_1 \geq E' + E'_1$, q.e.d.

Y análogamente para la recíproca.

mismos; la desigualdad dice luego que ella es función "creciente"; y se sigue inmediatamente por último que la propiedad análoga vale también en el caso de n sumandos.

Podemos deducir sin más que es posible medir las probabilidades del modo usual. Supóngase que hay n casos posibles $E_1, E_2,\ldots, E_n$ (una clase completa de eventos incompatibles) idénticamente probables, y sea E la suma de m de entre ellos; supóngase asimismo que hay n' casos posibles $E'_1, E'_2,\ldots, E'_n$ idénticamente probables (también una clase completa), y sea E' la suma de m' de entre estos. Pongamos $nn' = N$, $mn' = M$, $m'n = M'$, e imaginemos una clase completa de N eventos incompatibles idénticamente probables $A_1, A_2,\ldots, A_N$; sea entonces A una suma de N, A' una suma de N' de entre ellos. Veremos que $E \cong A$, $E' \cong A'$, y $A' > A$, $A' \cong A$ o $A > A'$ según que $N < N'$, $N = N'$ o $N > N'$. Y por lo tanto E' es más o menos probable que E o idénticamente probable a él según que m'/n' sea mayor, menor o igual que m/n.

En efecto, dividamos los eventos $A_1, A_2,\ldots, A_N$ en n clases de n' eventos cada una; sus sumas lógicas constituyen una clase de eventos incompatibles idénticamente probables (por el postulado (4)), y son también idénticamente probables que los E_1, $\ldots$, E_n. Supongamos absurdamente que no sea $B_1 \cong E_1$, que sea, por ejemplo, $B_1 > E_1$; entonces tendríamos también que $B_2 > E_2,\ldots, B_n > E_n$. Pero $(B_1 +\ldots+ B_n) \cong (E_1 +\ldots+ E_n)$, pues ambos son eventos ciertos, y esto no es posible (por el postulado (4')) a menos que $E_i \geq B_i$ para algún i. Y con ello queda demostrado el aserto.

Las propiedades ya utilizadas garantizan también que E (suma de m eventos E_i) es idénticamente probable a A (suma de mn' eventos B_i). Del mismo modo se demuestra que E' y A' son idénticamente probables.

Hemos demostrado en suma que es posible reducirse "a un denominador común", como debe ser el caso justamente si la representación fraccionaria de las probabilidades está justificada por los postulados (1)-(4). Solo nos resta demostrar entonces que, cuando los denominadores son iguales, la probabilidad "crece al crecer el numerador". Traduciendo este lenguaje aritmético, que no puede tener otro valor que el de una referencia a los conceptos señalados, en otro más adecuado, se trata de demostrar que una suma A de eventos idénticamente probables de una clase incompatible completa $A_1,\ldots, A_n$ es más probable que una suma A' de M' entre ellos si $M > M'$.

Sabemos ya que todas las sumas de un igual número de A_i son idénticamente probables, y podemos entonces suponer que A' sea suma de M' entre los M eventos contenidos en A. Supongamos pues absurdamente que sea $A' \geq A$; tendremos que $A' + (-A) \geq A + (-A)$, una desigualdad en que el segundo miembro es un evento cierto y el primero es un evento que no es cierto (faltan $M - M'$ casos posibles). Esto es absurdo, y el teorema está pues demostrado.

Se ha probado así que los postulados (1)-(4) aseguran la legitimidad de la convención usual de medir la probabilidad de un evento mediante la función $P(E)$ definida como sigue. En primer lugar, si E es idénticamente probable a la suma de m entre n eventos idénticamente probables que constituyen una clase completa, es $P(E) = m/n$; en general, es luego $P(E) = x$ si para cualquier evento E' con probabilidad racional y definida del modo precedente, se tiene $E' < E$ cuando $y < x$ y $E < E'$ cuando $x < y$.

Se ve fácilmente que $P(E) \geq P(E')$ implica que $E \geq E'$, pero no a la inversa. Por ejemplo, si tenemos dos eventos A y B, imposible el primero y el segundo posible pero con probabilidad cero, se tiene que $P(A) = P(B) = 0$, y sin embargo $A < B$, por el postulado (2). Los postulados (1)-(4) darían al orden de las probabilidades una estructura no arquimédica. Se logra, sin embargo, medir de modo satisfactorio la probabilidad mediante números, esto es, haciendo arquimédica dicha estructura, en cuanto se ignoran las probabilidades "infinitamente pequeñas", vale decir, tales que al ser multiplicadas (en el sentido usual, cuya definición sobre la base de lo dicho es obvia) por un número n por grande que sea no tienden jamás a la certeza, o, en otras palabras, son siempre menores que la probabilidad $1/n$ de uno entre n eventos incompatibles idénticamente probables que constituyen una clase completa. Observemos que la locución "idénticamente probable" que hemos introducido sin investigar si era necesaria, efectivamente lo es. Dos eventos idénticamente probables ($E' \cong E''$) siempre son igualmente probables ($P(E') = P(E'')$), pero no a la inversa.

14. Para que las consideraciones recién expuestas puedan constituir efectivamente un método sobre el cual fundar el cálculo de probabilidades, no nos falta en este punto más que elucidar su valor y su significado psicológico y mostrar que, en virtud de este mismo significado, las aseveraciones que acabamos de adoptar como postulados deben juzgarse efectivamente como satisfechas por un individuo coherente.

Para poder gozar, en caso que E se realice, de una cierta ventaja V, de cualquier naturaleza que sea, estamos dispuestos a sobrellevar sacrificios tanto más gravosos cuanto más probable nos parezca E; esta es la observación que, expresada en forma cuantitativa precisa, nos ha permitido ya definir la probabilidad de otro modo. Ahora debemos mostrar que, aun dejándole el carácter puramente cualitativo con que acabamos de enunciarla, basta para poner de manifiesto la íntima razón por la cual deben valer los postulados de la sección precedente, de los cuales se desprende sin más, como ya se ha demostrado, la legitimidad del cálculo de probabilidades en su forma usual.

En el fondo, el propósito de todas estas consideraciones es explicar qué es y qué significa la coherencia; lo habíamos dicho recurriendo a un esquema preciso que podía, con todo, parecer artificioso, y ahora queremos ver más claramente la esencia de esta noción. Podremos concluir enseguida de manera muy satisfactoria que la coherencia se puede definir sobre la base de puras consideraciones cualitativas, diciendo que un individuo es coherente si evalúa, no ya el grado de probabilidad de ciertos eventos, sino solo las desigualdades entre estos grados de probabilidad, de modo de no contradecir ciertos principios, a saber, precisamente los postulados (1)–(4). Examinemos un momento su alcance. El primero prácticamente no dice nada; en la práctica basta decir que se limita a considerar la probabilidad de aquellos eventos de los que sabemos decir en todo caso si uno es menos o más o igualmente probable que otro. Esto es, si para gozar de cierta ventaja V en el supuesto de que uno se cumpla, nos parece que valdría la pena sobrellevar sacrificios mayores, menores o iguales a los que valdría la pena sobrellevar para gozar de ella en el supuesto de que se cumpla el otro. El segundo y el tercer postulado limitan efectivamente la libertad de juicio de un individuo que quiera mantenerse coherente: no puede considerar un evento cualquiera como más probable que un evento cierto o menos probable que un evento imposible, ni puede juzgar un evento E_1 más probable que un segundo evento E_2, juzgar a este más probable que un tercero E_3, y al tercero más probable que el primero. Estas restricciones son sin embargo bien obvias. Para poder gozar de cierta ventaja V en el supuesto de que se realice un evento problemático, nadie estaría dispuesto a hacer sacrificios mayores que para asegurarse la ventaja V incondicionalmente, ni podrá hacer sacrificios menores que no haciendo ninguno, como si la ventaja V fuese imposible. Y un individuo que para gozar de cierta ventaja V en el supuesto de que se realice E_2 considera que puede hacer, y con mayor razón, cada sacrificio que estaría dispuesto a sobrellevar para gozar de ella en el supuesto de que se realice E_1, y que para gozarla en el supuesto de que se realice E_3, considera que vale la pena, y con mayor razón, hacer cada sacrificio que valdría la pena hacer para gozar de ella en el supuesto de que se realice E_2, no puede, sin íntima contradicción, no estar dispuesto a sobrellevar, y con mayor razón, para gozar de la ventaja V en el supuesto de que se realice E_3 cada sacrificio que haría para gozar de ella en el supuesto de que se realice E_1.

Debemos detenernos un poco más en el último postulado, el cuarto, que es el esencial. Este dice, en suma, que las desigualdades entre probabilidades se pueden *componer*, del modo usual, haciendo sumas lógicas de eventos incompatibles. Para dar un ejemplo, si un individuo juzga, al comienzo del campeonato de fútbol, que la Roma tiene mayor probabilidad de adjudicarse el título que la Ambrosiana, y que la Lazio tiene mayor probabilidad que el Milán, él debe pensar también, para que su opinión no sea intrínsecamente incoherente, que es más probable que conquiste el título un equipo romano y no un equipo milanés. En este ejemplo tenemos cuatro eventos incompatibles –la victoria final de cada uno de los cuatro equipos nombrados– y los designaremos con las iniciales R, A, L, M. Hemos supuesto que un individuo juzga que $R > A$ y $L > M$, y hemos dicho que, para satisfacer el postulado cuarto, debe entonces juzgar que $R + L > A + M$; en efecto, debe juzgar que $R + L > A + L > A + M$. Un razonamiento tan simple está permitido aquí por la circunstancia simplificadora de que los cuatro eventos son incompatibles entre ellos, pero a este caso elemental es posible reducirse también en general (véase la nota 18), y basta pues demostrar el enunciado más simple del postulado (4), más bien que el del (4′). Esto es, demostrar que si A es un evento incompatible con B y con C, entonces $A + B > A + C$ si $B > C$, y a la inversa.

Sea pues A un evento cualquiera, y B un evento incompatible con A; para poder gozar de cierta ventaja V en el supuesto de que se realice A estamos dispuestos a sobrellevar un cierto grupo S de sacrificios, cuya índole no interesa especificar; para poder gozar de ella también en el supuesto de que se realice B estaremos dispuestos a sobrellevar, además de aquellos del grupo S, aún otros sacrificios que forman un grupo S'; esto significa que para poder gozar de la ventaja V en el supuesto de que se realice $A + B$ estamos dispuestos a sobrellevar un grupo de sacrificios $S + S'$. Pero si C es otro evento incompatible con A y lo juzgamos no menos probable que B, tras haber sobrellevado los sacrificios S para asegurarnos la ventaja V en caso que se verifique A, estaremos todavía dispuestos a sobrellevar además los sacrificios S' para poder gozar de ella también en el caso que se realice C; en definitiva, pues, aún estamos dispuestos a sobrellevar el grupo de sacrificios $S + S'$ para poder gozar de la ventaja V en el supuesto que se realice $A + C$[19]. O sea que juzgamos $A + C$ no menos probable que $A + B$, justamente como queríamos demostrar.

Estas argumentaciones no pretenden ser precisas y rigurosas; son más bien deliberadamente vagas, porque en una cuestión de esta índole merece mayor desconfianza el razonamiento matemáticamente más preciso, al cual escapa necesariamente el mayor o menor apego al proceso psicológico, inevitablemente impreciso y vago por naturaleza. Me parece sin embargo que por esta vía se logra el propósito que nos fijamos: de individualizar en su raíz la esencia de las razones que guían a un individuo *coherente* y le imponen el cumplimiento de ciertos principios para que su opinión sobre la probabilidad de ciertos eventos no le parezca intrínsecamente contradictoria.

15. Podemos retornar ahora a la definición primitiva, basada sobre la esperanza matemática. Las investigaciones de las últimas secciones han removido las dudas que ella podía suscitar: hemos visto en efecto que condiciones cualitativas de significado inmediato y manifiestamente ajustado al concepto intuitivo de probabilidad conducen a una definición perfectamente equivalente. Esta definición penetra más íntimamente en el significado psicológico de la probabilidad, pero no da un criterio *descriptivo* para la evaluación numérica de las probabilidades; dado un evento singular E, ella no da la posibilidad, aunque sea abstracta o teórica, de evaluar su probabilidad, salvo indirectamente, mediante la consideración de otros eventos y en relación con ellos.

Intentemos aclararlo mediante una analogía. Se puede definir la temperatura de un cuerpo comenzando por definir la desigualdad entre dos temperaturas; de dos cuerpos A y B se llamará mayor la temperatura de aquél que, al poner ambos cuerpos en contacto, cede calor al otro. Precisando luego sobre la base de experiencias cualitativas análogas cuál de dos desniveles de temperatura debe considerarse mayor, una vez admitidas propiedades experimentales que se consideran como postulados, de las cuales se sigue que las temperaturas tienen el carácter de magnitudes y la adición puede definirse para ellas, quedará finalmente definida también la temperatura en grados centígrados cuando se agregue que $t = 0$ y $t = 100$ miden respectivamente la temperatura de congelación y de ebullición del agua. Pero si uno quisiera llegar efectivamente a medir la temperatura de un cuerpo por este camino, debería disponer de una serie suficientemente numerosa de cuerpos a distintas temperaturas que le

[19] [El original dice: "per poter godere del vantaggio V subordinatamente al verificarsi di $A + B$" (p. 326); pero es claro que se trata de un error y que hay que leer "al verificarsi di $A + C$". N. del T.]

permitiesen verificar todas las desigualdades que le hagan falta para llegar a una conclusión. Si digo en cambio: la temperatura es el número indicado por el termómetro, doy de ella una definición que en el acto me permite medir la temperatura de un cuerpo, directamente, sin tener necesidad de otros cuerpos a temperatura diferentes como términos de referencia, naturalmente siempre que disponga de un termómetro.

En el caso de la probabilidad, este "termómetro" está dado por el criterio de la esperanza matemática. Y no es tampoco un termómetro carente de significado inmediato, como el de la temperatura, que alguien que desconozca su funcionamiento podría leer sin advertir que mide el calor y el frío. Este se basa aún en el concepto intuitivo; no hace más que manipularlo de un modo que puede parecer artificioso y por eso dar lugar a algunas dudas. Una vez que se ha demostrado, como se hizo ampliamente hasta aquí, que de artificioso no tiene más que la apariencia, que ese criterio equivale en los resultados al otro más intuitivo, no hay ya razón para dudar de él.

16. Una vez demostradas las propiedades fundamentales del cálculo clásico de probabilidades, se sigue de ello que todos los resultados de dicho cálculo no son sino *consecuencias* de la definición que hemos dado de la *coherencia*. Un individuo que al juzgar acerca de la probabilidad de ciertos eventos contradice un teorema del cálculo de probabilidades no es coherente: un jugador podría hacer apuestas con él asegurándose el triunfo a toda prueba. Entre otras consecuencias están las conocidas relaciones entre probabilidad y frecuencia, que será útil, sin embargo, ilustrar de un modo más conforme a nuestro punto de vista. Tal argumento será tratado en otro trabajo.

Se observará luego que no se ha hecho ninguna alusión a las probabilidades condicionales (probabilidad de que un evento se realice cuando otro evento se suponga verificado), del teorema relativo a ello de las probabilidades compuestas[20], y del concepto de eventos independientes que se deriva de ahí. El caso es que estas nociones son bastante más delicadas de lo que se las juzga ordinariamente y que no es en absoluto necesario introducirlas desde el primer momento. Se puede, y es más bien aconsejable, si se quiere aclarar bien los conceptos, desarrollar en una primera etapa la teoría de las probabilidades de un evento, teoría de la cual hemos dado aquí todos los fundamentos, y dejar para una segunda etapa la extensión del cálculo de probabilidades a los eventos condicionales, extensión que requiere premisas, definiciones y explicaciones enteramente y también conceptualmente nuevas e interesantes.

También este argumento será objeto de otro trabajo. Observemos sin embargo desde ya que, si quisiéramos contentarnos con una definición carente de significado psicológico, como se dan usualmente, tendríamos ya todos los elementos para definir

20 [Se trata del teorema llamado de Bayes, mencionado en la nota † que acompaña a la advertencia del traductor. N. del T.]

"formalmente" la probabilidad condicional, poniendo "*probabilidad de E bajo la condición E'*" $= \dfrac{P(E \cdot E')}{P(E')}$. De esta definición se deduciría inmediatamente el *teorema de las probabilidades compuestas:*

$$P(E \cdot E') = P(E') \times P(E|E')$$

donde se indica con $P(E|E')$ la probabilidad de E bajo la condición de que ocurra E'; sin embargo, dicho teorema no sería sino una definición disimulada del símbolo $P(E|E')$[21]. En el modo de proceder que desarrollaremos y que hemos anunciado de antemano, se dará en cambio una definición psicológica directa de la probabilidad condicional, gracias a la cual el teorema de las probabilidades compuestas (y por ende la definición "formal" aquí indicada) se infiere como consecuencia necesaria de la familiar definición de coherencia. Y este es el único modo de proceder conforme a nuestro punto de vista.

Resumen / *Abstract*[22]

Se explica cómo es posible introducir el concepto de probabilidad con todo rigor y demostrar las propiedades fundamentales bien conocidas del mismo, ateniéndose exclusivamente al punto de vista subjetivo. Tras haber indicado un procedimiento de carácter cuantitativo que se presta particularmente al tratamiento analítico, se analizan críticamente sus principios, demostrando que son de naturaleza puramente cualitativa y elemental.

We show how it is possible to introduce the concept of probability with full rigor and to prove its well-known fundamental properties while wholly abiding by the subjective standpoint. After indicating a quantitative procedure that lends itself particularly well for analytic treatment, we critically analyze its principles and demonstrate that they are purely qualitative and elementary in nature.

21 [$P(E|E')$ es el símbolo corriente en la literatura actual. Algunos autores reemplazan el trazo vertical con uno oblicuo –lo que hoy en Chile llaman *eslach*– y escriben $P(E/E')$. De Finetti escribe $P\left(\frac{E}{E'}\right)$ las tres veces. N. del T.]

22 [Los resúmenes en castellano y en inglés los he traducido del resumen en italiano que aparece a la cabeza de la publicación original. N. del T.]